

DOI: 10.63527/1607-8829-2025-3-45-56

Іваночко М.М. (<https://orcid.org/0009-0003-1389-6707>),  
Іванущак Н.М. (<https://orcid.org/0009-0001-3747-9903>),  
Струк А.Я. (<https://orcid.org/0000-0001-5102-4182>)

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,  
вул. Коцюбинського 2, Чернівці, 58012, Україна

Автор-кореспондент: Іваночко М.М., e-mail: [m.ivanochko@chnu.edu.ua](mailto:m.ivanochko@chnu.edu.ua)

### Аналітичне та чисельне дослідження температурних полів в циліндричних термоелементах з внутрішніми джерелами тепла

---

*Методом скінченних інтегральних перетворень здійснено аналітичний розв'язок задачі нестационарної теплопровідності обмеженого циліндра з безперервно діючими джерелами тепла, вміщеного в середовище з постійною температурою. Запропоновано підхід чисельного дослідження теплових полів у циліндричних структурах з внутрішніми джерелами тепла з урахуванням впливу зовнішніх умов. Здійснено числову реалізацію аналітичного розв'язку, числове моделювання теплового розподілу та 3D-візуалізація термодинамічної поведінки системи. Методика чисельного моделювання використана для прогнозування температурного режиму в термоелектричних структурах з внутрішніми джерелами тепла, що є основою для інженерного проектування ефективних термоелектричних систем.*

**Ключові слова:** нестационарна теплопровідність, метод кінцевих інтегральних перетворень, граничні умови, термоелектричний генератор, термоелектричні ефекти, внутрішні джерела тепла, температурне поле, числове моделювання.

### Вступ

Розробка раціональних методик та алгоритмів чисельного вирішення нестационарних завдань теплофізики з температурною залежністю теплофізичних властивостей є надзвичайно важливою та актуальною для проектування сучасних промислових об'єктів.

В роботі розроблений алгоритм, який уможливує описати розподіл температури в циліндричній області досліджуваної структури при дії внутрішніх джерел тепла та впливі зовнішніх умов. Методика чисельного моделювання може ефективно

---

**Цитування:** Іваночко М.М., Іванущак Н.М., Струк А.Я. (2025). Аналітичне та чисельне дослідження температурних полів в циліндричних термоелементах з внутрішніми джерелами тепла. Термоелектрика, (3), 46–56. <https://doi.org/10.63527/1607-8829-2025-3-45-56>

використовуватись для прогнозування температурного режиму в термоелектричних генераторах (ТЕГ), які мають такі особливості:

- внутрішні джерела тепла: радіоізотопні, електричні або хімічні;
- компактні габарити (часто циліндричні або близькі до таких);
- чутливість до перегріву або локального теплового накопичення.

Проведене в роботі чисельне моделювання може бути результативно застосоване для прогнозування теплових процесів в ТЕГ, де джерела тепла розміщуються всередині циліндричної області; для оптимізації геометрії та матеріалів ТЕГ, щоб забезпечити найвищий термоелектричний ККД при допустимій температурі; для оцінки довговічності і стійкості матеріалів з урахуванням накопичення тепла в центрі та потенційного перегріву.

Зокрема, запропонований підхід аналітичного та чисельного дослідження теплових полів у циліндричних структурах з внутрішніми джерелами тепла придатний для розрахунку температурних процесів у реальних інженерних системах, таких як термоелектричні генератори (ТЕГ) [1–5], інфрачервоні датчики тощо та дослідження процесів, які генерують теплові потоки всередині структури і призводять до термоелектричних ефектів.

Таким чином, отримане рішення може бути перспективною основою для інженерного проектування ефективних термоелектричних систем.

Пов'язано здійснені в роботі дослідження з роботою термоелектричного генератора (ТЕГ) (рис. 1), встановимо природу процесів, які генерують температурні градієнти всередині структури, що призводить до виникнення термоелектричних ефектів.

Термоелектричні генератори (ТЕГ), які базуються на внутрішніх джерелах тепла, використовують *температурні градієнти*, що виникають безпосередньо всередині структури матеріалу або пристрою. Це дозволяє результативно перетворювати теплову енергію у електричну за рахунок *термоелектричних ефектів*, зокрема ефекту *Зеебека*. Нижче подано основні типи таких термогенераторів, принцип їх роботи, приклади й роль внутрішніх джерел тепла.

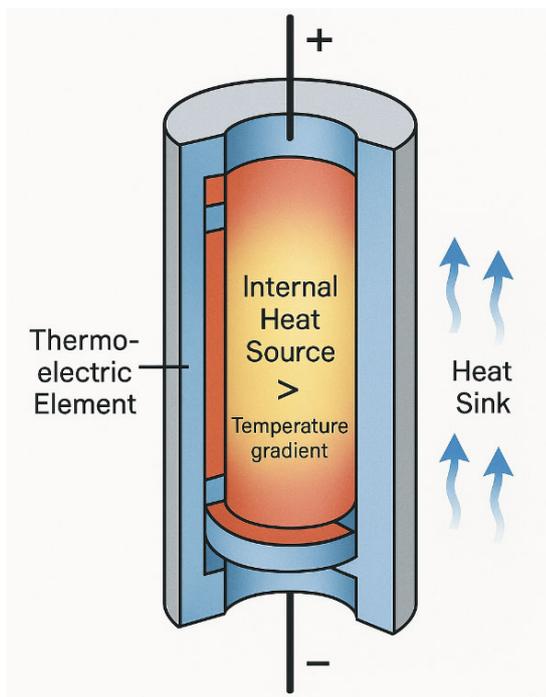


Рис. 1. Схема термоелектричного генератора

## **Термоелектричні генератори з вбудованими радіоізотопними джерелами (RTG)**

У середині генератора розміщується радіоактивна речовина (наприклад, плутоній-238), яка в процесі радіоактивного розпаду виділяє тепло. Це тепло створює температурний градієнт між нагрітою внутрішньою зоною та охолодженим зовнішнім корпусом. Завдяки цьому градієнту виникає термо-ЕРС, що генерує струм між гарячими і холодними кінцями термопари [6, 7].

### **Термоелементи з електричним нагріванням (електрично активовані ТЕГ)**

Джерелом є електричний струм, що подається ззовні, але сам нагрів відбувається всередині структури.

### **Хімічні термоелектричні генератори**

Тепло виділяється внаслідок екзотермічної хімічної реакції (наприклад, окиснення металу чи органічної речовини). Генератор сконструйований так, що ця реакція відбувається всередині корпусу, де розміщені термоелементи.

### **Термоелектричні генератори із внутрішніми фотонними або лазерними джерелами**

Всередині термоелемента розміщується джерело інфрачервоного або лазерного випромінювання, яке спрямовано на абсорбуючий шар. Цей шар перетворює світлову енергію у тепло, формуючи температурний градієнт.

#### **Роль внутрішнього джерела тепла в ТЕГ:**

- створює стійке температурне поле всередині обмеженої структури; забезпечує постійну подачу тепла, необхідну для безперервної генерації електричного струму;
- формує тепловий потік крізь термоелектричний елемент, що й забезпечує роботу генератора.

У всіх випадках внутрішні джерела тепла є ключовим фактором для забезпечення стійкого температурного градієнта, без якого неможливе виникнення термоелектричного струму.

## **Аналітичний розв'язок задачі нестационарної теплопровідності**

Методом скінченних інтегральних перетворень [8] розв'яжемо задачу нестационарної теплопровідності обмеженого циліндра з безперервно діючими джерелами тепла в ньому.

Постановка задачі: Розглянемо однорідний суцільний обмежений циліндр кругового перерізу з радіусом  $R$  і висотою  $l$  з діючими внутрішніми джерелами тепла, поміщеного в середовище зі змінною в часі температурою  $\hat{T}_c(t)$ . На межах циліндра відбувається вільний теплообмін за законом Ньютона. Всередині в циліндрі діють залежні від часу джерела тепла з об'ємною густиною потужності  $q_v$ . Введемо відлік температури від  $\hat{T}_c(t)$ , тобто  $T = \hat{T} - \hat{T}_c$ , тоді в системі координат  $(r, z)$  математичну постановку задачі можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_V(t)}{\lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial \widehat{T}_C(t)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$(0 < r < R, 0 < z < l, 0 < t < \infty)$$

початкова умова задає початкову температуру  $T^0$  всередині циліндра

$$T(r, z, 0) = T^0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < l; \quad (2)$$

граничні умови відображають теплообмін з навколишнім середовищем з температурою  $T_C$  та задають тепловий потік через основу циліндра при  $z = 0$ :

$$\frac{\partial T(0, z, t)}{\partial r} = 0, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < \infty; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(R, z, t)}{\partial r} + h_1 T(R, z, t) = 0, \quad 0 < z < l, \quad 0 < t < \infty; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial z} - h_2 T(r, 0, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < \infty; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(r, l, t)}{\partial z} + h_3 T(r, l, t) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < \infty. \quad (6)$$

Тут  $r, z$  [м] – поперечна і поздовжня координати відповідно;  $t$  [с] – час;  $T, T^0$  [К] – поточна та початкова температури;  $a$  [м<sup>2</sup>·с<sup>-1</sup>] – коефіцієнт температуропровідності;  $q_V$  [Вт/м<sup>3</sup>] – об’ємна густина потужності внутрішніх джерел тепла;  $\lambda$  [Вт/(м·К)] – коефіцієнт теплопровідності;  $h_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$  [м<sup>-1</sup>],  $\alpha_i$  [Вт/(м<sup>2</sup>·К)] – коефіцієнт тепловіддачі,  $i = 1, 2, 3$ .

Якщо ввести масштаби:  $T_M$  – для температури,  $R$  – для лінійних розмірів,  $R^2/a$  – для часу,  $q_{V0}$  – для об’ємної густини тепловиділення, то задача (1) – (6) набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + Q(\tau) - \frac{\partial \widehat{u}_C(\tau)}{\partial \tau}, \quad (7)$$

$$(0 < \rho < 1, 0 < Z < \Lambda, 0 < \tau < \infty)$$

$$u(\rho, Z, 0) = u^0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < Z < \Lambda; \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(0, Z, \tau)}{\partial \rho} = 0, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \quad (9)$$

$$\frac{\partial u(1, Z, \tau)}{\partial \rho} + Bi_1 u(1, Z, \tau) = 0, \quad 0 < Z < \Lambda, \quad 0 < \tau < \infty; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u(\rho, 0, \tau)}{\partial Z} - Bi_2 u(\rho, 0, \tau) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \tau < \infty; \quad (11)$$

$$\frac{\partial u(\rho, \Lambda, \tau)}{\partial Z} + Bi_3 u(\rho, \Lambda, \tau) = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \tau < \infty. \quad (12)$$

Тут  $\rho = r/R$ ;  $Z = z/R$ ;  $\Lambda = \lambda/R$ ;  $u = T/T_M$ ;  $u^0 = T^0/T_M$ ;  $\hat{u}_C = \hat{T}_C/T_M$ ;  $T_M = q_{V0}R^2/\lambda$ ;  $\tau = F_0 = at/R^2$  ( $F_0$  – число Фур'є);  $h_i R = \alpha_i R/\lambda = Bi_i$ ,  $i=1,2,3$  ( $Bi_i$  – число Біо);  $Q(\tau) = q_V(t)/q_{V0}$ .

Розв'яжемо задачу (7)–(12) використовуючи метод кінцевих інтегральних перетворень. Дотримуючись визначених вимог, для виключення диференціальних виразів по  $Z$  отримаємо ядро прямого перетворення у вигляді

$$\bar{K}_{\mu_n}(Z) = \frac{1}{C_{\mu_n}} \left( \cos \mu_n Z + \frac{Bi_2}{\mu_n} \sin \mu_n Z \right). \quad (13)$$

Нормуючий дільник дорівнює

$$C_{\mu_n} = \frac{\Lambda}{2} \left( 1 + \frac{Bi_2^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{(Bi_2 + Bi_3)(\mu_n^2 + Bi_2 Bi_3)}{2\mu_n^2(\mu_n^2 + Bi_3^2)},$$

а власні числа  $\mu_n$  ( $n=1, 2, 3$ ) є додатними коренями характеристичного рівняння

$$\operatorname{ctg} \mu \Lambda = \frac{\mu^2 - Bi_2 Bi_3}{\mu(Bi_2 + Bi_3)}. \quad (14)$$

За допомогою інтегрального перетворення в інтервалі  $0 < Z < \Lambda$  з ядром (13) зведемо задачу (7)–(12) до вигляду

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} - \mu_n^2 \bar{u} + \bar{f}(\tau), \quad (15)$$

тут ризикою позначені інтегральні образи вихідних величин  $u$ ,  $u(0)$  і  $f(\tau) = Q(\tau) - \frac{\partial \hat{u}_C}{\partial \tau}$ ,

тобто

$$\bar{u} = \int_0^\Lambda \bar{K}_{\mu_n} u dZ; \quad \bar{u}(0) = A_n u^0; \quad \bar{f}(\tau) = A_n f(\tau), \quad (16)$$

де  $A_n = \frac{1}{C_{\mu_n} \mu_n^2} \left( (-1)^{n+1} Bi_3 \sqrt{\frac{\mu_n^2 + Bi_2^2}{\mu_n^2 + Bi_3^2}} \right) + Bi_2$ .

Виключимо диференційні операції по  $\rho$ . Ядро прямого перетворення в цьому випадку має вигляд

$$\tilde{K}_{v_k}(\rho) = \frac{\rho}{C_{v_k}} J_0(v_k \rho), \quad (17)$$

нормуючий дільник  $C_{v_k} = \int_0^1 J_0^2(v_k \rho) \rho d\rho = \frac{1}{2} (J_0^2(v_k) + J_1^2(v_k))$ ;

$J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  – функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків; власні числа  $v_k^2$  є додатними коренями характеристичного рівняння

$$\frac{J_0(v)}{J_1(v)} = \frac{v}{Bi_1}. \quad (18)$$

Здійснюючи пряме перетворення задачі (15), (16) з ядром (17) в інтервалі  $0 < \rho < 1$ , отримаємо звичайне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + (\mu_n^2 + v_k^2)\tilde{u} = \tilde{f}(\tau),$$

$$\text{тут } \tilde{u} = \frac{1}{C_{v_k}} \int_0^1 \bar{u}(\rho, \tau) J_0(v_k \rho) \rho d\rho, \quad \tilde{u}(0) = A_n A_k u^0, \quad \tilde{f}(\tau) = A_n A_k f(\tau),$$

$$A_k = \frac{2Bi_1}{J_0(v_k)(v_k^2 + Bi_1^2)}, \quad (19)$$

розв'язок якого, отриманий методом варіації сталої, має вигляд

$$\tilde{u}(\tau) = e^{-(\mu_n^2 + v_k^2)\tau} \left( \int_0^\tau \tilde{f}(\tau') e^{(\mu_n^2 + v_k^2)\tau'} d\tau' + \tilde{u}(0) \right).$$

Слід зазначити, що в отриманому результаті тильдою позначені інтегральні образи подвійного перетворення вихідних величин.

Здійснюючи зворотне перетворення, знаходимо остаточний розв'язок задачі

$$u(\rho, Z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_n A_k e^{-(\mu_n^2 + v_k^2)\tau} \left( \cos \mu_n Z + \frac{Bi_2}{\mu_n} \sin \mu_n Z \right) \times \\ \times J_0(v_k \rho) \left( \int_0^\tau f(\tau') e^{(\mu_n^2 + v_k^2)\tau'} d\tau' + u^0 \right) \quad (20)$$

Одержаний розв'язок є знакозмінним рядом. Оскільки для знакозмінних рядів сума відкинутих доданків по абсолютній величині не перевищує першого із цих доданків, то при відносній похибці  $\varepsilon = 0.001$  для малих проміжків часу ( $\tau \sim 10^{-4}$ ) їх число складає  $n = k = 30$ . Зі збільшенням часу число доданків зменшується. Так, при  $\tau > 0.5$  указана точність досягається утримуванням всього лише чотирьох членів ряду.

Отже, для аналітичного розв'язання задачі застосовано метод інтегральних перетворень, що уможливило звести задачу з частинними похідними до задачі Коші з рядовим розв'язком, що включає функції Бесселя першого роду та тригонометричні функції. Остаточний розв'язок подано у вигляді знакозмінного ряду (20), що швидко збігається.

### Числове моделювання

Проведено повний числовий розрахунок температурного поля всередині циліндричної структури в залежності від радіальної змінної  $r$ , змінної  $z$  та часу  $t$ .

Для числової реалізації аналітичного розв'язку задачі (20) нестационарної теплопровідності в однорідному циліндрі з внутрішніми джерелами тепла було використано мову програмування Python 3.11 із застосуванням бібліотек NumPy, SciPy та Matplotlib. Реалізація включає побудову температурного поля на основі ряду, що містить функції

Бесселя першого роду та тригонометричні функції, який отримано методом кінцевих інтегральних перетворень.

Для підвищення гнучкості та інтерактивності аналізу параметрів задачі застосовано модуль `ipywidgets` (рис. 2), що дозволяє динамічно змінювати вхідні фізичні характеристики (теплопровідність, густину, теплоємність, розміри області, потужність джерел тощо) та миттєво отримувати графічні залежності температури в характерних перерізах циліндричної області.

Візуалізація результатів виконувалась за допомогою бібліотеки `Matplotlib`, з адаптивним масштабуванням осей та кольоровим кодуванням для порівняння температур у різні моменти часу. Власні значення обчислювались із використанням функцій `jn_zeros()` з бібліотеки `SciPy`, яка реалізує корені функцій Бесселя.

$\lambda$ (Вт/м·К):	111
$\rho$ (кг/м <sup>3</sup> ):	8500
$c$ (Дж/кг·К):	377
$a$ (м <sup>2</sup> /с):	0,0000586
$qv$ (Вт/м <sup>2</sup> ):	10000
$T_0$ (°C):	30
$T_c$ (°C):	20
$R$ (м):	0,05
$L$ (м):	0,05
$N$ (по $r$ ):	<input type="range" value="5"/> 5
$M$ (по $z$ ):	<input checked="" type="range" value="11"/> 11
<input type="button" value="Обчислити та побу..."/>	

Рис. 2. Форма модуля `ipywidgets` для динамічної зміни вхідних фізичних характеристик

## Візуалізація результатів

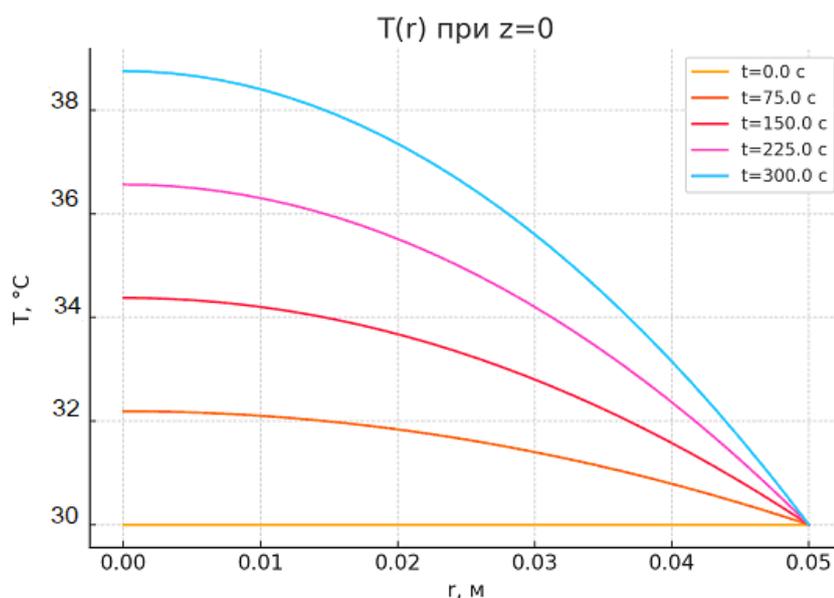


Рис. 3. Температурний розподіл по радіусу циліндра

Графік на рис.3 демонструє, як змінюється температура по радіусу циліндра в різні моменти часу (0, 75, 150, 225, 300 секунд). У результаті числового моделювання

спостерігається інтенсивний нагрів центральної частини циліндра, що пояснюється відсутністю теплообміну всередині й наявністю постійних внутрішніх джерел тепла. Температура плавно зменшується до країв циліндра як в радіальному, так і в осьовому напрямках, що узгоджується з теплообміном через поверхні за законом Ньютона. Краї циліндра (на поверхні) втрачають менше тепла завдяки незначному градієнту температур – ефект Ньютона на межах слабкий у порівнянні з внутрішнім джерелом. Графік демонструє плавну зміну температури, без різких стрибків, що свідчить про коректну реалізацію моделі.

### Теплова карта температури $T(r, t)$

Побудовано температурні профілі для залежностей  $T(r, z = 0, t)$ , що демонструють радіальний розподіл температури на осьовій площині (Рис. 4).

Отримані графіки  $T(r, t)$  (Рис. 4), 3D-профілі ілюструють характер теплового розподілу і дозволяють візуалізувати термодинамічну поведінку системи, демонструючи рівномірну теплову еволюцію, що відповідає умові однорідності матеріалу і симетрії задачі. Теплова карта температури  $T(r, t)$  одночасно візуалізує температурний розподіл по радіусу та часу, тобто демонструє динаміку нагрівання циліндричної структури вздовж радіуса  $R$  внутрішніми джерелами тепла. Яскраві зони - високі температури, темні – більш охолоджені. В центрі ( $r = 0$ ) швидше накопичується тепло, що свідчить про ефективну генерацію внутрішнього тепла. Чітко видно, як просувається фронт нагрівання: температура зростає суттєво спочатку у центрі області, пізніше – в більш віддалених зонах – відбувається процес теплопровідності з ядра до периферії.

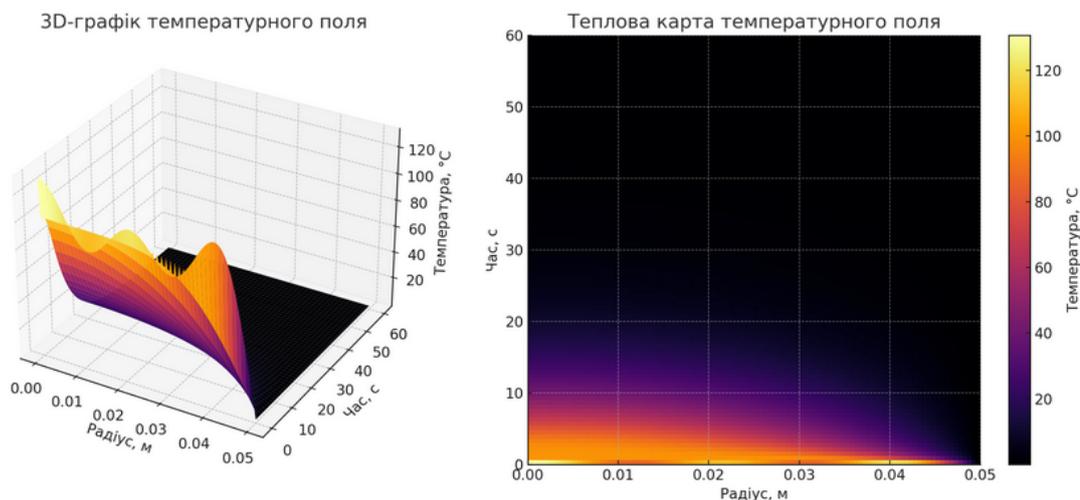


Рис. 4. 3D – графік та теплова карта температурного поля

Теплова карта  $T(z, t)$  демонструє схожий характер прогріву вздовж осі циліндра. Внаслідок симетричності й однакових граничних умов по  $z$ , прогрів рівномірний.

## Числове моделювання та 3D-візуалізація температурного поля у чверті циліндричної області

3D-графік відображає температурний розподіл у площині  $(r, z)$  в початковий момент часу  $t = 0$  с (рис. 5 а) та при максимальному часу  $t = 150$  с (рис. 5 б) — видно центральне "ядро" з підвищеною температурою, що свідчить про накопичення тепла в центральній частині тіла.

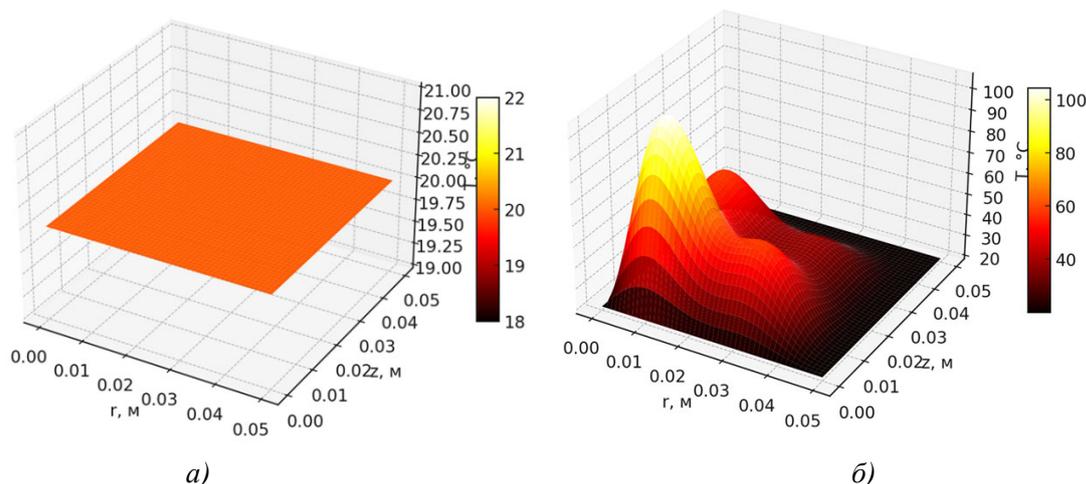


Рис. 5. Розподіл температурного поля

(а – розподіл температури,  $t = 0$  с; б – розподіл температури,  $t = 150$  с)

Отримані результати підтверджують фізичну суть задачі: внутрішнє джерело тепла викликає нагрів всієї циліндричної області, з максимумом температури в центральній частині. На початковий момент часу температура скрізь дорівнює  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  (рис. 5 а). Через наявність внутрішніх джерел тепла та ізольованих бокових поверхонь циліндр нагрівається зсередини.

Радіальні й осьові градієнти температури зберігаються протягом процесу нагріву, що демонструє ефективність теплообміну на межах.

Модель демонструє швидку збіжність, і вже за невеликого часу температура помітно зростає.

Поведінка температури відповідає очікуваній фізичній моделі: зона з внутрішнім джерелом найбільше нагрівається, особливо поблизу центру.

Поступова передача тепла з центра до країв дозволяє побачити розповсюдження теплового фронту в часі. Зі збільшенням часу зростає амплітуда температурного профілю, а крива стає більш пологою – відображаючи зменшення температурного градієнта. Графіки (рис. 5) підтверджують, що джерело тепла в центральній частині циліндра створює домінуючу теплову хвилю, яка поступово поширюється до меж.

Числове моделювання підтвердило фізичну достовірність та стабільність отриманого аналітичного розв'язку.

Автори висловлюють подяку Лиську В.В. за корисні поради та цінні коментарі під час підготовки цієї роботи.

## Висновки

1. Методом скінченних інтегральних перетворень отримано аналітичний розв'язок задачі нестационарної теплопровідності для обмеженого циліндра з безперервно діючими джерелами тепла.
2. Проведено чисельний розрахунок температурного поля, поведінка якого відповідає запропонованій моделі, тобто найбільше нагрівається центральна зона з внутрішнім джерелом тепла. З часом нагрів плавно змінюється як в радіальному, так і в осьовому напрямках області.
3. Отримане перспективне рішення забезпечує точне прогнозування теплових процесів у циліндричних ТЕГ з внутрішніми джерелами, що є основою для інженерного проектування результативних термоелектричних систем. Циліндрична форма забезпечує максимальний градієнт температури між центром (гарячий спай) і периферією (холодний спай), що критично важливо для ефективно роботи термоелектричного генератора. Максимальний градієнт температури має бути спрямований вздовж електродів для ефективного використання ефекту Зеебека. Внутрішні температури не повинні перевищувати граничні робочі температури термоелементів.
4. Отримані візуалізації дають чітке уявлення про процеси переносу тепла та можуть бути основою для оптимізації теплообміну в інженерних системах.

## Інформація про авторів

Іваночко М.М. – Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри термоелектрики та медичної фізики.

Івануцзяк Н.М. – Кандидат технічних наук, асистент кафедри комп'ютерних систем та мереж.

Струк А.Я. – Кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри будівництва.

## Література

1. Anatyshuk L., Prybyla A., Korop M., Kiziuk Y., & Konstantynovych I. (2024). Thermoelectric power sources using low-grade heat: Part 1. *Journal of Thermoelectricity*, (1-2), 90–96. <https://doi.org/10.63527/1607-8829-2024-1-2-90-96>
2. Anatyshuk L., Prybyla A., Korop M., Kiziuk Y., & Konstantynovych I. (2024). Thermoelectric power sources using low-grade heat : Part 2. *Journal of Thermoelectricity*, (3), 36–43. <https://doi.org/10.63527/1607-8829-2024-3-36-43>
3. Anatyshuk L., Prybyla A., Korop M., Kiziuk Y., & Konstantynovych I. (2024). Thermoelectric power sources using low-grade heat: Part 3. *Journal of Thermoelectricity*, (4), 61–68. <https://doi.org/10.63527/1607-8829-2024-4-61-68>
4. Cherkez R., Porubanyi O., Konstantynovych I., & Tomko S. (2025). Computer Study of a Thermocouple with Developed Lateral Heat Transfer. *Journal of Thermoelectricity*, (1), 37–47. <https://doi.org/10.63527/1607-8829-2025-1-37-47>

5. Lysko V., Konstantynovych I., Havryliuk M., & Rusnak O. (2024). Experimental studies on the parameters of thermoelectric generator energy converters with different height of legs. *Journal of Thermoelectricity*, (4), 50–60. <https://doi.org/10.63527/1607-8829-2024-4-50-60>
6. Naseem M.B., Lee J., & In S. (2024). *Radioisotope thermoelectric generators (RTGs): A review of current challenges and future applications*. Chemical Communications. <https://doi.org/10.1039/D4CC03980G>.
7. Fathy M., Ali M., Abood S.M., Hussein H.A., & Kareem R.A. (2022). *A comprehensive review of Radioisotope Thermoelectric Generator*. ResearchGate. <https://www.researchgate.net/publication/360719626>.
8. Karvatskyi A.Ya. (2015). *Finite element method in problems of continuum mechanics. Software implementation and visualization of results*. Textbook. Kyiv: NTUU “KPI” “Politechnica” Publ.

Submitted: 22.08.2025

**M.M. Ivanochko** (<https://orcid.org/0009-0003-1389-6707>),  
**N.M. Ivanuschak** (<https://orcid.org/0009-0001-3747-9903>),  
**A.Ya. Struk** (<https://orcid.org/0000-0001-5102-4182>)

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,  
2 Kotsiubynsky str., Chernivtsi, 58012, Ukraine

## **Analytical and Numerical Study of Temperature Fields in Cylindrical Thermoelements with Internal Heat Sources**

*Using the method of finite integral transformations, an analytical solution was provided to the problem of non-stationary thermal conductivity of a bounded cylinder with continuously operating heat sources placed in a medium with a constant temperature. An approach for numerical study of thermal fields in cylindrical structures with internal heat sources, with regard to the influence of external conditions, is proposed. Numerical implementation of the analytical solution, numerical simulation of heat distribution, and 3D visualization of the thermodynamic behaviour of the system are carried out. The numerical simulation technique is used to predict the temperature mode in thermoelectric structures with internal heat sources, which is the basis for the engineering design of efficient thermoelectric systems.*

**Keywords:** non-stationary thermal conductivity, finite integral transformation method, boundary conditions, thermoelectric generator, thermoelectric effects, internal heat sources, temperature field, numerical simulation.

Надійшла до редакції 22.08.2025