

DOI: 10.63527/1607-8829-2026-2-5-14

Снарський А.О.^{1,2} (<https://orcid.org/0000-0002-4468-4542>),
Іванова І.М.¹ (<https://orcid.org/0000-0002-6203-8907>),
Федотов В.В.¹ (<https://orcid.org/0000-0001-7821-0989>)

¹Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського", Берестейський проспект, 37, Київ, 03056, Україна;

²Інститут проблем реєстрації інформації НАН України,
вулиця Шпака, 2, Київ, 03113, Україна

Corresponding author: Іванова І.М., e-mail: im_ivan@ukr.net

Ефективні термоелектричні коефіцієнти для точно розв'язуваного двовимірного трифазного композиту

Знайдені ефективні термоелектричні коефіцієнти для двовимірно трифазного макроскопічно неупорядкованого середовища. Для отримання такого значення використаний метод послідовного усереднення, який дозволив використати для методу ізоморфізм, що був створений для двофазного випадку. Дане порівняння з наближенням середнього поля. Показано, що умови, що визначають точні значення ефективних кінетичних коефіцієнтів D – середовищ, для трифазних середовищ є недостатньо.

Ключові слова: ефективні термоелектричні коефіцієнти, двовимірний трифазний композит, макроскопічно неупорядковане середовище, гетерогенні матеріали.

Вступ

Існує багато наближених методів обчислення ефективних кінетичних коефіцієнтів (надалі ЕКК) для різного типу макроскопічно неупорядкованих середовищ, див. монографії [1–4]. Методом, що найбільше використовується, є метод теорії середнього поля, т.з. метод самоузгодження або наближення Бруггемана-Ландауера [5, 6]. Як завжди, при використанні наближених методів виникає питання їх точності і застосовності при різних значеннях параметрів, наприклад, при слабкій або сильній неоднорідності локальних властивостей. Одним з можливих шляхів отримання відповіді є порівняння результатів наближеного методу з точним розв'язком. Очевидно, точні розв'язки можливі в виключних (одиночних) випадках, інакше нащо б ми

Цитування: Снарський А.О., Іванова І.М., Федотов В.В. (2026). Ефективні термоелектричні коефіцієнти для точно розв'язуваного двовимірного трифазного композиту. *Термоелектрика*, (2), 5–14. <https://doi.org/10.63527/1607-8829-2026-2-5-14>

Отримано: 11.03.2026; Переглянуто: 02.04.2026; Опубліковано: 30.06.2026

© 2026 Автори. Це стаття з відкритим доступом, що розповсюджується відповідно до умов ліцензії Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

використовували наближення. Так для задачі обчислення ефективної провідності σ_e (за відсутності термоелектричних явищ) відомі точні розв'язки для плоскошарових середовищ та двовимірних двофазних середовищ Дихне [7]. В цих же випадках можливі точні розв'язки для середовищ з термоелектричними явищами.

Тут пропонується метод, який може бути названий методом послідовного усереднення, що дозволяє отримати точний розв'язок для неупорядкованих середовищ спеціальної структури з термоелектричними явищами для трифазного середовища.

В першому розділі буде розглянута схема послідовного усереднення для задачі про ефективну провідність і буде дано порівняння з наближеним методом Бругемана-Ландауера. У другій частині буде розглянута задача з термоелектричними явищами, там же буде наведено наближений розв'язок задачі в рамках наближення теорії середнього поля.

1. Ефективна провідність двовимірного трьохфазного середовища

Тут ми будемо використовувати точний результат для двофазного середовища, отриманий А.М. Дихне [7]. В роботі було показано, що для двофазного двовимірного $m = 2$ середовища, з питомими провідностями σ_1 і σ_2 , з їх концентрацією $\frac{1}{2}$ і таким їх розташуванням, що ефективна провідність σ_e є скаляром і не міняється при взаємній зміні фаз $\sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_2$, тобто $\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_e(\sigma_2, \sigma_1)$ має місце точний аналітичний вираз

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (1)$$

Такі середовища в подальшому будемо називати середовищами Дихне або D -середовищами.

Розглянемо тепер наступний алгоритм побудови середовища з трьох фаз $m = 3$ [8]. Візьмемо три бокси з номерами 1, 2 і 3, в кожному з яких знаходиться матеріал (фаза), з провідностями σ_1, σ_2 і σ_3 відповідно – Рис. 1.

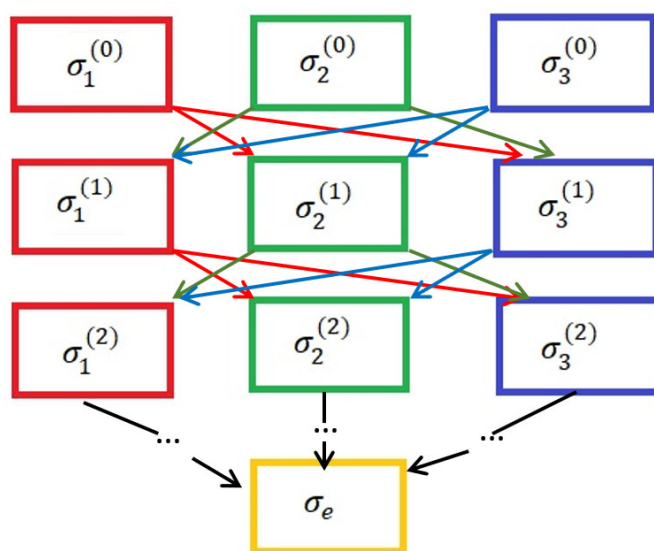


Рис. 1. Схема послідовного усереднення

Таке розташування таких фаз в таких боксах будемо називати нулевим кроком

$$\sigma_1^{(0)} = \sigma_1, \sigma_2^{(0)} = \sigma_2, \sigma_3^{(0)} = \sigma_3. \quad (2)$$

На наступному, першому кроці візьмемо з боксів 2 і 3 рівну долю матеріалів (з провідностями $\sigma_2^{(0)}$ і $\sigma_3^{(0)}$) і утворимо з них D -середовище, з провідністю $\sigma_1^{(1)}$, яку розмістимо в новий бокс 1

$$\sigma_1^{(1)} = \sqrt{\sigma_2^{(0)} \sigma_3^{(0)}} = \sqrt{\sigma_2 \sigma_3}. \quad (3)$$

Аналогічно утворимо і матеріали в нових боксах 2 і 3

$$\sigma_2^{(1)} = \sqrt{\sigma_1^{(0)} \sigma_3^{(0)}} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_3}, \quad \sigma_3^{(1)} = \sqrt{\sigma_1^{(0)} \sigma_2^{(0)}} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (4)$$

Продовжуючи цю процедуру, для другого кроку $\sigma_1^{(2)}$ отримаємо

$$\sigma_1^{(2)} = \sqrt{\sigma_2^{(1)} \sigma_3^{(1)}} = \sqrt{\sqrt{\sigma_1 \sigma_3} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}} = \sqrt{\sigma_1 \sqrt{\sigma_2 \sigma_3}} = \sigma_1^{1/2} \sigma_2^{1/4} \sigma_3^{1/4}, \quad (5)$$

І аналогічно для інших боксів.

Продовжуючи таку процедуру, послідовного перемішування з усередненням, для ступенів питомих провідностей першого боксу, які були на другому кроці рівні (див. (5)) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ на наступних кроках, починаючи з нульового, отримаємо

$$\sigma_1 \rightarrow 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{11}{32}, \frac{21}{64}, \frac{43}{128}, \dots \quad (6)$$

Ступені

$$\sigma_2 \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{11}{32}, \frac{21}{64}, \frac{43}{128}, \dots \quad (7)$$

$$\sigma_3 \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{11}{32}, \frac{21}{64}, \frac{43}{128}, \dots \quad (8)$$

Послідовність чисельників (6) $a_n = 0, 1, 1, 3, 5, \dots$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, що підкоряється рекурентному співвідношенню $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, носить назву Jacobsthal number і згідно бібліотеці послідовностей [9] не є аналітичним виразом для n -ого номеру. Проте при $n \gg 1$ значення a_n наближується до найбільшого цілого від $2^n / 3$. А оскільки знаменних послідовності (6) це 2^n , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_1^{a_n/2^n} = \sigma_1^{1/3}. \quad (9)$$

Аналогічно і для (7) та (8).

Таким чином кінцевий результат послідовного усереднення, коли на кожному етапі використовується точний вираз для ефективного значення, для всіх трьох боксів дає

$$\sigma_e = \sqrt[3]{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}. \quad (10)$$

Вираз (10) відповідає якісним міркуванням. Дійсно, оскільки на кожному кроці усереднення (4), (5) і наступних ефективна провідність в кожному з боксів має вигляд $\sigma_1^\alpha \sigma_2^\beta \sigma_3^\gamma$, а кінцеве значення не має залежати від нумерації фаз,

$$\sigma_e(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_e(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3) = \sigma_e(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = \dots, \quad (11)$$

то $\alpha = \beta = \gamma$, а їх сума, в силу розмірності $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Порівняємо тепер результат отриманого σ_e (10) значення, згідно використанню точного результату (1) ефективної провідності з наближеним виразом, яке можна отримати з наближення Бруггемана-Ландауера

$$\frac{\sigma_e - \sigma_1}{\sigma_e + \sigma_1} p_1 + \frac{\sigma_e - \sigma_2}{\sigma_e + \sigma_2} p_2 + \frac{\sigma_e - \sigma_3}{\sigma_e + \sigma_3} p_3 = 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (12)$$

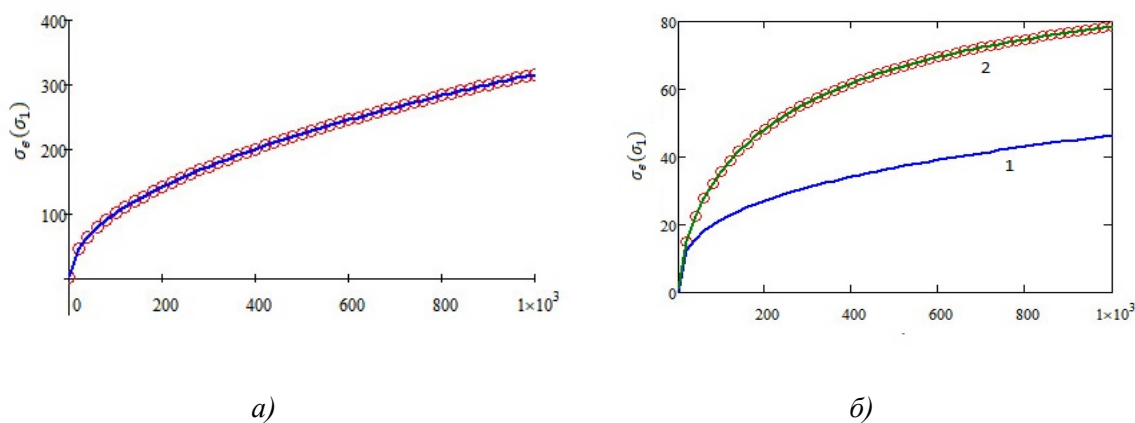


Рис. 2. Залежності ефективної провідності σ_e від величин провідності першої з фаз.

а- для трифазного випадку, 1 – точний розв'язок (10),
2 – наближений (13), б- для двофазного випадку

При рівній концентрації фаз

$$\frac{\sigma_e - \sigma_1}{\sigma_e + \sigma_1} + \frac{\sigma_e - \sigma_2}{\sigma_e + \sigma_2} + \frac{\sigma_e - \sigma_3}{\sigma_e + \sigma_3} = 0. \quad (13)$$

На Рис. 2 наведені залежності ефективної провідності від значення одної з фаз для точного розв'язку (10) згідно розв'язку рівняння Бруггемана-Ландауера (13) для дво- та трифазних випадків.

Як видно з Рис. 2 б – наближення Бруггемана-Ландауера співпадає з точним аналітичним розв'язком Дихне (1). Це, звичайно, пов'язано з тим, що умов сформульованих для D-середовищ – 1) двовимірність, 2) двофазність, 3) ізотропія ефективного значення, 4) рівна концентрація фаз і незалежність ефективної провідності від взаємної заміни фаз – достатньо для однозначного визначення ефективної провідності. Таким умовам відповідає велика кількість різних структур [4]. Наприклад, така, що утворена послідовним усередненням двовимірних полікристалів, що в свою чергу утворені з плоскошарових структур, дає теж точне значення (10) [8].

Як видно з Рис. 2а, для тривимірного випадку аналогічних умов, що приводять до одного – універсального виразу недостатньою Наближення Бруггемана-Ландауера, в якому розуміється, що ефективна провідність ізотропна, не залежить від взаємної зміни фаз і їх концентрація однакова, дає результат відмінний від результату, що отриманий послідовним усередненням.

2. Термоелектричні властивості двовимірного трифазного середовища

В випадку термоелектричних явищ, закон Ома, записаний в локальному і усередненому виді

$$\mathbf{j} = \sigma(r)\mathbf{E}, \quad \langle \mathbf{j} \rangle = \sigma^e \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (14)$$

має бути узагальненим і включати потік тепла – $\mathbf{q}$ і градієнт температур – $\mathbf{g} = -\text{grad}T$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} + \gamma \mathbf{g}, \\ \mathbf{s} &= \gamma \mathbf{E} + \chi \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $\gamma = \sigma\alpha$, $\chi = \kappa / T(1 + ZT)$, $\mathbf{s} = \mathbf{q} / T$, $Z = \sigma \cdot \alpha^2 / \kappa$, α – коефіцієнт термоЕРС, κ – коефіцієнт теплопровідності та для зручності (симетрії в системі (15)) введений потік $\mathbf{s} = \mathbf{q} / T$.

Запишемо цю систему в зручному вигляді для подальшого, в матричних позначеннях

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= A_{11}\mathbf{E} + A_{12}\mathbf{g} \\ \mathbf{s} &= A_{12}\mathbf{E} + A_{22}\mathbf{g} \end{aligned} \quad (16)$$

або

$$\begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

де $\hat{\mathbf{A}}$ – тензор термоелектричних коефіцієнтів.

Відповідно

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \right\rangle = \hat{\mathbf{A}}^e \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (18)$$

$\hat{\mathbf{A}}^e$ – тензор ефективних термоелектричних коефіцієнтів.

Для D -середовищ, як і в випадку чисто провідної задачі, має місце точний аналітичний розв'язок [10, 8], який в матричному вигляді може бути записаний як

$$\hat{\mathbf{A}}^e = \left(\text{Det} \hat{\mathbf{A}}_1 \text{Det} \hat{\mathbf{A}}_2 \right)^{1/4} \frac{\frac{\hat{\mathbf{A}}_1}{\sqrt{\text{Det} \hat{\mathbf{A}}_1}} + \frac{\hat{\mathbf{A}}_2}{\sqrt{\text{Det} \hat{\mathbf{A}}_2}}}{\sqrt{\text{Det} \left(\frac{\hat{\mathbf{A}}_1}{\sqrt{\text{Det} \hat{\mathbf{A}}_1}} + \frac{\hat{\mathbf{A}}_2}{\sqrt{\text{Det} \hat{\mathbf{A}}_2}} \right)}}, \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

Індекс 1 і 2 задає першу і другу фазу.

Вираз для ефективних термоелектричних коефіцієнтів (19) можна отримати з тих самих міркувань симетрії, які були сформульовані і використані в [7] для знаходження точного значення ефективної провідності, за відсутності термоелектричних явищ. Можливий також ще один шлях розв'язку цієї задачі. В роботах [11, 12, 10], див. також [4, 13, 14, 15] показано як, маючи відомий аналітичний вираз (залежність від значення фаз і концентрації) ефективної провідності двофазного середовища, отримати вираз для ефективних термоелектричних коефіцієнтів. Такий метод, що зветься методом ізоморфізму, дозволяє, наприклад, виходячи з $\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ отримати (19). На жаль, цей метод працює тільки для двофазного випадку. Для трифазного випадку, цей метод не працює і залишається тільки використати наближені методи, наприклад теорію середнього поля.

Тут ми покажемо, як для розглянутого випадку отримання ефективної провідності трифазного середовища, що використовує точний розв'язок двофазного випадку ($\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \rightarrow \sqrt[3]{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}$), можна узагальнити на термоелектричну задачу.

Введемо позначення

$$\hat{Q}(\hat{a}, \hat{b}) = \left(\text{Det} \hat{a} \cdot \text{Det} \hat{b} \right)^{1/4} \frac{\frac{\hat{a}}{\sqrt{\text{Det} \hat{A}_1}} + \frac{\hat{A}_2}{\sqrt{\text{Det} \hat{A}_2}}}{\sqrt{\text{Det} \left(\frac{\hat{A}_1}{\sqrt{\text{Det} \hat{A}_1}} + \frac{\hat{A}_2}{\sqrt{\text{Det} \hat{A}_2}} \right)}}. \quad (20)$$

Застосуємо тепер процес послідовного усереднення і наمالюємо схему перемішування аналогічну до використаної вище для отримання ефективної провідності. Розглянемо три бокси (див. Рис. 1), в яких знаходиться матеріал, з тензорами локальних кінетичних коефіцієнтів $\hat{P}$, $\hat{T}$ і $\hat{S}$. На нульовому кроці

$$\hat{P}^{(0)} = \hat{A}_1, \quad \hat{T}^{(0)} = \hat{A}_2, \quad \hat{S}^{(0)} = \hat{A}_3, \quad (21)$$

тобто на нульовому кроці в боксах знаходиться матеріал з локальними коефіцієнтами, що відповідають першій, другій і третій фазі відповідно.

На першому кроці в боксах знаходиться матеріал з ефективними властивостями, що отриманий згідно (20)

$$\hat{P}^{(1)} = \hat{Q}(\hat{T}^{(0)}, \hat{S}^{(0)}), \quad \hat{T}^{(1)} = \hat{Q}(\hat{P}^{(0)}, \hat{S}^{(0)}), \quad \hat{S}^{(1)} = \hat{Q}(\hat{P}^{(0)}, \hat{T}^{(0)}), \quad (22)$$

і на $n+1$ -ому кроці

$$\hat{P}^{(n+1)} = \hat{Q}(\hat{T}^{(n)}, \hat{S}^{(n)}), \quad \hat{T}^{(n+1)} = \hat{Q}(\hat{P}^{(n)}, \hat{S}^{(n)}), \quad \hat{S}^{(n+1)} = \hat{Q}(\hat{P}^{(n)}, \hat{T}^{(n)}). \quad (23)$$

При $n \rightarrow \infty$ матриці в боксах збігаються одна з одною і їх значення і є значеннями ефективних термоелектричних коефіцієнтів трифазного середовища.

$$\hat{A}^e(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{T}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}^{(n)}. \quad (24)$$

На Рис. 3а показана залежність ефективних коефіцієнтів A_{11}^e, A_{12}^e і A_{22}^e від величини термоЕРС α . Значення першої фази було обрано близьким до термоелектричного матеріалу Bi_2Te_3 $\sigma_1 = 10^5 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, $\alpha_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ В/К}$, $\kappa_1 = 1 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$, при $T = 300 \text{ К}$ добротність другої фази $Z_1 T = 1.2$ [16]. Відмітимо, що для прикладу розглянутий випадок зміни коефіцієнту термоЕРС тільки першої фази, всі інші термоелектричні коефіцієнти всіх фаз – провідність, термоЕРС другої і третьої фази і теплопровідність не міняються. Згідно (15)–(16) це означає, що при зміні α_1 матричні коефіцієнти $A_{12} = \sigma_1 \alpha_1$ і $A_{22} = \frac{\kappa_1}{T} \left(1 + \frac{\sigma_1 \alpha_1^2}{\kappa_1} T \right)$ міняються. Для другої і третьої фази обрано $B_{11} = 5 \cdot 10^6$, $B_{12} = 10^{-3}$, $B_{22} = 0.13$, $C_{11} = 1$, $C_{12} = 0.01$, $C_{22} = 0.01$.

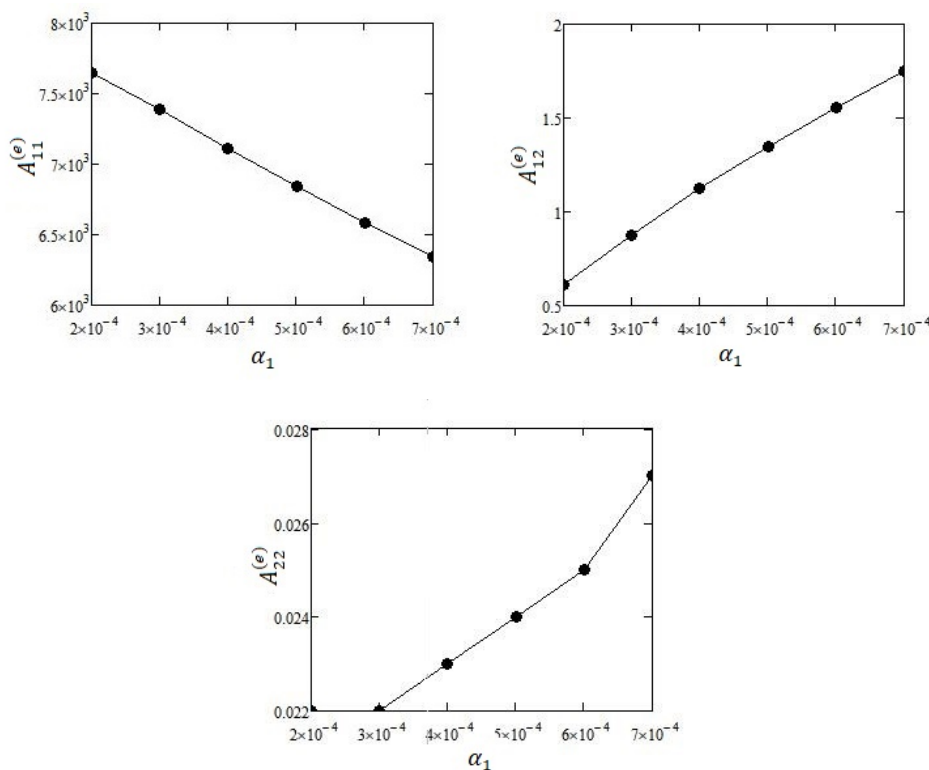


Рис. 3. Залежність ефективних кінетичних коефіцієнтів від термоЕРС α_1 першої фази отриманий методом послідовного усереднення

Порівняємо тепер отримані методом послідовного усереднення ефективні термоелектричні коефіцієнти з результатом обчислення наближеним методом – узагальненням наближення Бруггемана-Ландауера на термоелектричний випадок

$$\frac{\hat{A}^e - \hat{A}_1}{\hat{A}^e - \hat{A}_1} p_1 + \frac{\hat{A}^e - \hat{A}_2}{\hat{A}^e - \hat{A}_2} p_2 + \frac{\hat{A}^e - \hat{A}_3}{\hat{A}^e - \hat{A}_3} p_3 = 0, \quad (25)$$

де як в (12,13) $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

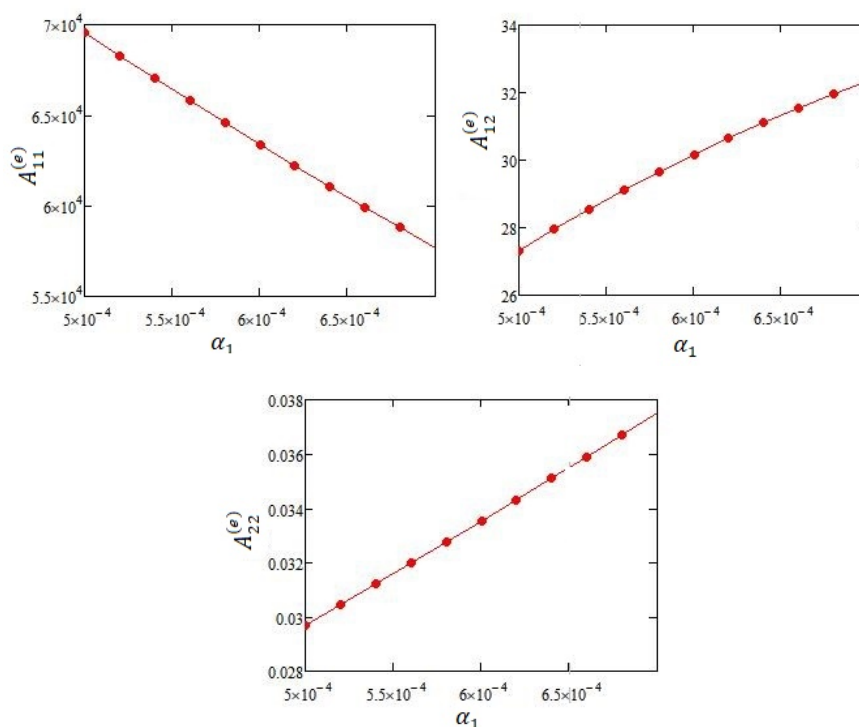


Рис. 4. Залежність ефективних кінетичних коефіцієнтів від термоЕРС α_1 першої фази, отримана з наближення Бругемана-Ландауєра

Як видно з Рис. 4, отримані наближеним методом залежності якісно мають ті самі закономірності, зростання чи падіння, але інші числові значення. Це аналогічно тому, що має місце при порівнянні розрахунків однопотокової задачі ефективної провідності.

Обговорення

В роботі сформульований і використаний метод послідовного усереднення. Цей метод дозволяє обчислити ефективні кінетичні коефіцієнти, в тому числі у випадку термоелектричних явищ.

Перше – як зрозуміло з самої «побудови», отримане середовище має нестандартну структуру. Так, для задачі провідності дає ефективне значення провідності з нестандартною залежністю від значень локальної провідності. Наприклад, при обраній рівній концентрації фаз, за взаємної заміни фаз, у випадку прямування локальної провідностей однієї з фаз до нуля, до нуля ж прямує і ефективне значення провідності. Середовище перестає проводити.

Друге. Метод послідовного усереднення для термоелектрики, коли на кожному етапі усереднення розглядається двофазне середовище, що дозволяє використати точний метод ізоморфізму, що принципово неможливо для трифазного середовища. Таким чином такий, «обхідний», шлях послідовного усереднення (перемішування) – дозволяє використати «двофазний» метод для трифазного випадку.

Третє. Показано, що при використанні умов сформульованих для D -середовищ – 1) двовимірність, 2) двофазність, 3) ізотропія ефективного значення, 4) рівна

концентрація фаз і незалежність ефективної провідності від взаємної заміни фаз – достатнього для визначення (завдання) ефективної провідності, недостатньо для трифазного середовища. Наведені два приклади трифазних середовищ з різними ефективними провідностями, в яких ці умови виконані. Це ж твердження стосується і визначення ефективних кінетичних коефіцієнтів при наявності термоелектричних явищ. Відмітимо, що при дослідженні ефективних пружних коефіцієнтів [17] таких умов недостатньо вже для двофазного випадку.

Інформація про авторів:

Снарський А.О. – Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри загальної фізики.

Іванова І.М. – Кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри загальної фізики

Федотов В.В. – Старший викладач кафедри загальної фізики.

Література

1. Torquato S. (2002). *Random heterogeneous materials. Microstructure and macroscopic properties*, Springer Verlag: New York, USA. doi: 10.1115/1.1483342.
2. Stauffer D., & Aharony A. (2018). *Introduction to percolation theory*. Taylor & Francis doi: 10.1201/9781315274386
3. Choy T.C. (2016). *Effective medium theory: principles and applications*, Oxford University Press: Oxford, UK. doi:10.1093/acprof:oso/9780198705093.001.0001
4. Snarskii A., Bezsudnov I.V., Sevryukov V.A., Morozovskiy A., Malinsky J. (2016). *Transport processes in macroscopically disordered media. From mean field theory to percolation*. Springer Verlag: New York, USA. doi: 10.1007/978-1-4419-8291-9
5. Bruggeman V.D. (1935). *Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. I. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten der Mischkörper aus isotropen Substanzen*. Ann. Phys. (Leipzig), 416, 664. doi: 10.1002/andp.19354160705
6. Landauer R. (1952). The electrical resistance of binary metallic mixtures. *J. Appl. Phys.*, 23, 784. doi:10.1063/1.1702301
7. Dykhne A.M. (1971). Conductivity of a two-dimensional two-phase system. *Sov. Phys. JETP*, 32 (1), 63 – 65
8. Snarskii A.O., Tomchuk P.M. (1987). Kinetic phenomena in macroscopically inhomogeneous anisotropic media. *Ukr. J.Phys.* 32, 66
9. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), <https://oeis.org/?language=english>
10. Balagurov B.Y. (1983). Isomorphism of certain problems of percolation theory. *Sov. Phys. JETP* 58(2), 331
11. Halpern V. (1983) The Thermopower of Binary Mixtures *J.Phys.C*, 16 (7), L217. doi: 10.1088/0022-3719/16/7/002
12. Webman, I., Jortner, J., & Cohen, M. H. (1977). Thermoelectric power in inhomogeneous

- materials. *Physical Review B*, 16(6), 2959. doi: 10.1103/PhysRevB.16.2959.
13. Snarskii A.O., Vikhor L.M., & Podlasov S.O. (2025). Universal Relation for Thermoelectric Figure of Merit of Two-Phase Composites. *Journal of Thermoelectricity*, (2), 17-24. doi: 10.63527/1607-8829-2025-2-17-24
 14. Ivanova I., Snarskii A., Fedotov V., & Didur I. (2025) Reciprocity Relation in Thermoelectric Composites: Optimizing Materials for Energy Efficiency and Thermal Management. *Physics and Chemistry of Solid State*, 26(3), 466-472. doi: 10.15330/pcss.26.3.466-472
 15. Snarskii A.O., Ivanova I.M., & Fedotov V. V. (2023). Thermoelectric composites and reciprocity relations. *Journal of Thermoelectricity*, (2), 38-49. doi:10.63527/1607-8829-2023-2-38-49
 16. Rowe D.M (2006). *Thermoelectrics Handbook (Macro to Nano)*, Boca-Raton: Taylor Francis.
 17. Snarskii A.A., Shamonin M., & Yuskevich, P. (2020). Effective medium theory for the elastic properties of composite materials with various percolation thresholds. *Materials*, 13(5), 1243. doi: 10.3390/ma13051243

A.O. Snarskii^{1,2} (<https://orcid.org/0000-0002-4468-4542>),

I.M. Ivanova¹ (<https://orcid.org/0000-0002-6203-8907>),

V.V. Fedotov¹ (<https://orcid.org/0000-0001-7821-0989>)

¹National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
Beresteiskyi Ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine;

²Institute for Information Recording of the NAS of Ukraine,
M. Shpaka Str., 2, Kyiv, 03113, Ukraine

Effective Thermoelectric Coefficients for an Exactly Solvable Two-Dimensional Three-Phase Composite

The effective thermoelectric coefficients for a two-dimensional three-phase macroscopically disordered medium are found. To obtain such a value, the method of sequential averaging is used, which allowed using for the method the isomorphism created for the two-phase case. This is compared with the mean-field approximation. It is shown that the conditions that determine the exact values of the effective kinetic coefficients of D-media are insufficient for three-phase media.

Keywords: effective thermoelectric coefficients, two-dimensional three-phase composite, macroscopically disordered medium, heterogeneous materials.